

Βάσεις Gröbner

9 Φεβρουαρίου 2016

1. (1.5 μονάδες) Γράψτε έναν ορισμό της βάσης Gröbner ενός ιδεώδους I του πολυωνυμικού δακτυλίου $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ και χρησιμοποιήστε τον για να αποδείξετε ότι αν $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ είναι βάση Gröbner του I τότε $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$.

2. (2 μονάδες) Δίνεται ο δακτύλιος $\mathbb{Q}[x, y, z]$ εφοδιασμένος με την βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη με $x > y > z$. Βρείτε μία ανάγωγη βάση Gröbner για το ιδεώδες

$$I = \langle xy + z, xy^2 + z \rangle.$$

3. (1.5 μονάδες) Έστω $f = 2x^3y^5z^4 + 3y^7z^7 + x^8y^3z \in \mathbb{Z}_7[x, y, z]$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει μονωνυμική διάταξη του $\mathbb{Z}_7[x, y, z]$ τέτοια ώστε $lt(f) = 2x^3y^5z^4$.

4. (1.5 μονάδες) Βρείτε μία ανάγωγη βάση Gröbner για το ιδεώδες

$$I = \langle x^n y^{2n} z^n - 1 \mid n \in \mathbb{N} \rangle$$

του δακτυλίου $K[x, y, z]$, ως προς οποιαδήποτε μονωνυμική διάταξη. Δείξτε ότι για αυτό το ιδεώδες I η ανάγωγη βάση Gröbner δεν εξαρτάται από την διάταξη.

5. (2 μονάδες) Στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y, z, u, v]$ με μονωνυμική διάταξη την *degrevlex* με $x > y > z > u > v$ δίνεται ότι το ιδεώδες $I = \langle x^4 - 1, y^4 - 1, z^4 - 1, u^4 - 1, v^4 - 1, x^3 + x^2y + xy^2 + y^3, x^3 + x^2z + xz^2 + z^3, x^3 + x^2u + xu^2 + u^3, x^3 + x^2v + xv^2 + v^3, z^3 + z^2y + zy^2 + y^3, v^3 + v^2y + vy^2 + y^3, u^3 + u^2y + uy^2 + y^3, u^3 + u^2z + uz^2 + z^3, u^3 + u^2v + uv^2 + v^3 \rangle$ έχει ανάγωγη βάση Gröbner την:

$$\{x + y + u + v, z - v, y^2 + yu + u^2 + yv + uv + v^2, u^3 + u^2v + uv^2 + v^3, v^4 - 1\}.$$

Με ποιο συγκεκριμένο πρόβλημα της θεωρίας Γραφημάτων συνδέεται το παραπάνω ιδεώδες (εξηγήστε γιατί) και τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε από την παραπάνω βάση Gröbner.

6. (1.5 μονάδες) Ποιά είναι η διάσταση του μιγαδικού διανυσματικού χώρου

$$\mathbb{C}[x, y, z, u, v]/I,$$

$$\text{όπου } I = \langle x^4 - 1, y^4 - 1, z^4 - 1, u^4 - 1, v^4 - 1, x^3 + x^2y + xy^2 + y^3, x^3 + x^2z + xz^2 + z^3, x^3 + x^2u + xu^2 + u^3, x^3 + x^2v + xv^2 + v^3, z^3 + z^2y + zy^2 + y^3, v^3 + v^2y + vy^2 + y^3, u^3 + u^2y + uy^2 + y^3, u^3 + u^2z + uz^2 + z^3, u^3 + u^2v + uv^2 + v^3 \rangle.$$

Καλή επιτυχία